CASTELL

Novo-Duplex 2/83

mit 25 cm Teilungslänge

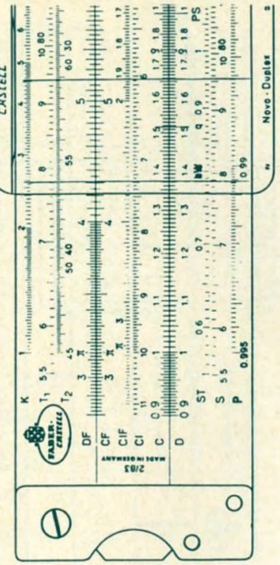
Besondere Merkmale:

1 Seine abgebrochenen Skalen (W_1, W_1', W_2, W_2') verleihen ihm die Genauigkeit eines 50 cm langen Rechenstabes

2 Die π-versetzten Skalen CF und DF sowie die reziproke π-Skala CIF erleichtern Tabellenrechnungen usw. wesentlich

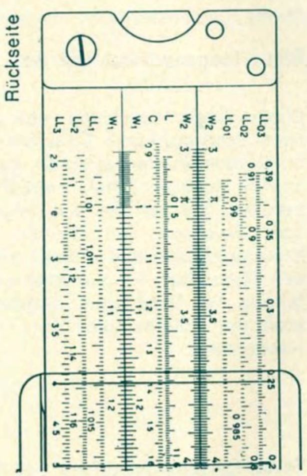
3 Die zweiteilige Tangensskala T_1, T_2 reicht bis 84,3° und macht Umwege über Kofunktion und Reziprokskala überflüssig

Vorderseite



der neue Rechenstab mit der idealen Teilungszusammenstellung

Rückseite



4 Die ST-Skala besitzt neuartige Korrekturmarken für trigonometrische Berechnungen

5 Ein wesentliches Merkmal des „Novo-Duplex" sind seine 6 Exponentialskalen

6 Durch die besondere Schraubenkonstruktion der Metall-Laschen läßt sich die Schiebergängigkeit einstellen

A·W·FABER-CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

5

1962

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Seite 3	Einige grundlegende Bemerkungen zum Rechnen mit dem Rechenstab von Oberbaurat Prof. H. Seitz
Seite 7	Die rechnerische Behandlung des pythagoräischen Lehrsatzes auf dem Rechenstab von Ing. Rudolf Huber
Seite 10	Das Rechnen mit komplexen Zahlen am Rechenstab (Fortsetzung der Abhandlung aus den Rechenstabbriefen Nr. 3 und 4) von Ing. H. Bachmann

FABER-CASTELL

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt. Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Einige grundlegende Bemerkungen zum Rechnen mit dem Rechenstab

von Oberbaurat Prof. H. Seitz, Stuttgart

Mehrfache Unterredungen mit mathematischen Fachkollegen über die Benützung des Rechenstabes an Ingenieurschulen geben dem Verfasser die Anregung zu dem vorliegenden Aufsatz. Die äußere Form eines Dialoges entspricht einmal den Unterredungen, die den Anlaß zu diesen Ausführungen gegeben haben und bezweckt darüber hinaus die Anregung zu etwaiger weiterer „schriftlicher Aussprache". Wenn dabei als Gesprächspartner ein Mathematiker und ein Ingenieur auftreten, so soll damit lediglich die Grundeinstellung der beiden Redner zum ganzen Problemkreis gekennzeichnet sein. Der leidende Dritte tritt nicht persönlich in Erscheinung. Er wird kurzweg als „Anfänger" bezeichnet, gleichgültig, ob es sich dabei um einen Schüler eines Gymnasiums oder einer Berufsschule oder um einen Studenten an einer Ingenieurschule oder Hochschule handelt.

Mathematiker: Daß der Rechenstab ein vorzügliches Hilfsmittel für den Ingenieur ist, soll in keiner Weise bestritten werden. Trotzdem muß ich als Mathematiker gewisse Bedenken dagegen äußern, daß dieses Hilfsmittel zu früh in die Hände von Anfängern gegeben wird, die das Wesen des Rechenstabes noch gar nicht erfassen können, da ihnen die mathematischen Grundlagen des logarithmischen Rechnens noch nicht geläufig sind.

Ingenieur: Dieser Standpunkt ist durchaus verständlich. Es sei ohne weiteres zugegeben, daß die Einführung des Rechenstabes ohne vorhergehende Behandlung der Potenz- und Exponentialfunktionen nicht leicht ist und in gewissem Sinne in der Luft hängt. Aber auf der anderen Seite sind die Ingenieure daran interessiert, den Rechenstab so bald als irgend möglich einzuführen. Man kann den Anfänger nicht früh genug an dieses Hilfsmittel gewöhnen. Wir trösten uns dabei mit den Mathematikern!

Mathematiker: Wieso? Der Mathematikunterricht entwickelt den Begriff des Logarithmus streng logisch aus dem Rechnen mit Potenzen. Und gerade in dieser logischen Entwicklung steckt ein wesentliches erzieherisches Moment des mathematischen Unterrichtes.

Ingenieur: Und doch benützen Sie als Mathematiker die Logarithmentafel längst vor der Behandlung der logarithmischen Reihen. Wie die Zahlenwerte der Logarithmen gefunden werden, behandelt der Mathematiker viel später. Er nimmt sie aus didaktischen Gründen zunächst als gegeben an und verschiebt ihre Begründung auf einen späteren Zeitpunkt. Wo wir den logischen Gedankensprung machen, ist schließlich nicht so wichtig. Wesentlich erscheint mir, daß die exakte Begründung überhaupt gegeben wird. Über den Zeitpunkt kann man offenbar verschiedener Meinung sein!

Mathematiker: Außerdem aber werden die jungen Leute am Rechenstab zur Ungenauigkeit geradezu erzogen, um nicht zu sagen, gezwungen! Der ganze erzieherische Wert der Mathematik, die jeden Anfänger zur Exaktheit, Pünktlichkeit und Gewissenhaftigkeit erzieht, geht am Rechenstab verloren.

Ingenieur: In gewissem Umfang haben Sie recht. Ein 12,5 cm-Stab, der sog. Taschenrechenschieber, verbürgt eine sehr fragwürdige Genauigkeit. Er sollte grundsätzlich nur zu überschlägigen Berechnungen verwendet werden. Ein 25 cm-Stab aber steht in der Genauigkeit seiner Ergebnisse einer vierstelligen Logarithmentafel nicht wesentlich nach. Das Modell „Novo-Duplex" aber mit seiner unterbrochenen Skala, die einer Stablänge von 50 cm entspricht, kann den Vergleich mit einer vierstelligen Tafel aufnehmen! Der Fehler scheint mir weniger am Rechenstab als vielmehr an seiner Handhabung zu liegen. Ist doch für manchen Anfänger der Begriff „Rechenschiebergenauigkeit" gleichbedeutend mit jedem beliebigen Grad der Ungenauigkeit. Wenn aber der Läuferstrich z. B. bei 1 8 5 2 steht, so müssen wir eben den Anfänger dazu erziehen, daß er 18,52 und nicht einfach 20 als Ergebnis abliest!

Mathematiker: Es handelt sich nicht bloß um die Erziehung des Anfängers zu einem gewissenhaften Ablesen am Rechenstab. Es geht vielmehr um die grundsätzliche Frage, daß der Anfänger bewußt auf eine exakte Lösung seines Problems verzichtet und die mathematische Strenge in seiner Arbeit ignoriert.

Ingenieur: Dies liegt aber weniger am Rechenstab als vielmehr in der Natur der technischen Probleme überhaupt. Es bleibt doch dem Ingenieur in sehr vielen Fällen seiner praktischen Arbeit gar nichts anderes übrig, als daß er bei der mathematischen Formulierung des Problemes vereinfachende und idealisierende Annahmen macht, da eine strenge Lösung seiner Aufgabe an der Unmöglichkeit ihrer mathematischen Formulierung scheitert. Wenn wir also z. B. bei der Berechnung einer Maschine den Einfluß der Reibung vernachlässigen oder in der Hydraulik das Wasser als ideale Flüssigkeit ohne Viskosität behandeln, dann hat es doch wirklich keinen Sinn, die Rechenschiebergenauigkeit mit einer exakten Berechnung überbieten zu wollen. Und wenn man dann erlebt, daß der Anfänger irgendwelche statische Berechnungen womöglich auf Pond genau durchführt, obwohl in seinen Belastungen schon die kp-Werte geschätzt sind, dann merkt man erst, wie notwendig es ist, den Anfänger an Hand des Rechenstabes zu ingenieurmäßigem Denken und Rechnen zu erziehen.

Mathematiker: Hier klingt ein Begriff durch, auf den ich nachher noch eingehen möchte, der Begriff der „Ingenieurmathematik". Vorerst aber soll noch ein anderer Punkt zur Sprache kommen, der mit der allzufrühen und ausschließlichen Verwendung des Rechenstabes zusammenhängt. Der Anfänger wird bei der Gewöhnung an den Rechenstab sozusagen denkfaul, er führt jede Rechnung ganz mechanisch aus und verliert den inneren Kontakt mit der Welt der Zahlen.

Ingenieur: Wenn auch jene bekannte Witzfigur wesentlich häufiger zitiert als angetroffen werden dürfte, die $2 \times 2 = 3{,}98$ am Rechenstab ermittelt, so bin ich trotzdem mit Ihnen durchaus einig darin, daß der „innere Kontakt mit der Welt der Zahlen", den wir vielleicht am treffendsten als „Zahleninstinkt" bezeichnen, für den Ingenieur überaus wichtig ist. Der Ingenieur muß mit Zahlen mindestens so gut rechnen können wie mit Buchstaben. Wenn wir aber den Anfänger zwingen, jede Rechnung zunächst überschlägig abzuschätzen, ehe er das genauere Ergebnis am Rechenstab vollends ermittelt, dann vermittelt das Rechnen mit dem Rechenstab gerade das, was wir beide für so wichtig halten. Unwillkürlich vereinfacht der Anfänger durch sinnvolles Auf- und Abrunden jeden vorliegenden Zahlenausdruck und lernt so den Umgang mit Zahlen gerade am Rechenstab erst richtig. Außerdem lernt der Anfänger auf diese Weise die Größenordnung seines Rechenergebnisses abzuschätzen, was für den Anfänger so besonders wichtig ist.

Mathematiker: Mit dem letzten Hinweis auf die Abschätzung der Größenordnung eines Rechenergebnisses haben Sie mir den nächsten Einwand aus dem Munde genommen, denn es gibt im Grunde genommen keinen schlimmeren Fehler als wenn man am Rechenstab „nur einen Kommafehler" macht, wie der Anfänger zu sagen pflegt.

Ingenieur: Nichts begrüßt der Ingenieur mehr, als wenn ihn der Mathematiker im Kampf gegen den „Nur-Kommafehler" kräftig unterstützt!

Mathematiker: Ein weiterer Einwand, den ich gegen die meisten modernen Rechenstäbe zu machen habe, ist die für den Anfänger fast verwirrende Vielzahl von Skalen wie z. B. die Reziprokskala, die Skala mit $\sqrt{1-(0{,}1x)^2}$, die Skalen $\pi.x$ und $1/\pi.x$ und erst recht die Skalen mit den e-Potenzen. Alle diese Skalen sind für den Anfänger doch entbehrlich und verteuern nur den Rechenstab.

Ingenieur: Die Anschaffung eines Rechenstabes ist jedenfalls für den Studierenden einer Ingenieurschule eine Anschaffung auf weiteste Sicht, so daß der Preis nicht allzu sehr ins Gewicht fallen dürfte. Darüber hinaus aber erscheint es doch sehr erwünscht, daß der künftige Ingenieur sich möglichst bald an „seinen Rechenstab" gewöhnt und nicht erst mit einem primitiven Stab die Anfangsgründe kennen lernt, und sich dann später den komplizierteren Rechenstab anschafft, bei dem er z. B. die e-Potenzen in der Hydraulik anwenden muß. Auch die Skala mit $\sqrt{1-(0{,}1x)^2}$ ist für viele trigonometrische Berechnungen sehr wertvoll, da sie z. B. die sin-Werte für Winkel nahe bei 90^0 mit viel höherer Genauigkeit vermittelt als die einfache sin-Skala. Die Skalen mit $1/x$, πx und $1/\pi x$ sind nicht unbedingt notwendig und mancher Ingenieur verwendet z. B. die Skala $1/x$ nicht gerne, weil er sich auf ihr nicht sicher fühlt. Aber dies ist ja nur eine Frage der Übung und wer sich einmal in diese Skalen eingelebt hat, der möchte sie nicht mehr missen!

Mathematiker: Die Zweckmäßigkeit dieser zusätzlichen Skalen soll in keiner Weise bestritten werden. Es ging mir nur um die Frage ihrer Notwendigkeit für den Anfänger.

Ingenieur: Ich möchte zum Schluß unseres Gespräches noch auf den Begriff der „Ingenieurmathematik" zu sprechen kommen.

Mathematiker: Der Vater der Geometrie, Euklid, soll einmal zu seinem König Ptolemaios I. gesagt haben: „Zur Geometrie gibt es für Könige keinen Privatweg!" Und auch für Ingenieure gibt es keinen Privatweg zur Mathematik!

Ingenieur: Der Ingenieur sucht keinen „Königsweg zur Mathematik". Mathematik und Physik sind für ihn vielmehr grundlegende Wissenschaften, die er so weit beherrschen muß, als er sie im Rahmen seiner speziellen Ingenieurwissenschaft braucht, die er aber unmöglich um ihrer selbst willen betreiben kann. An die Stelle der mathematischen Exaktheit und Genauigkeit treten bei ihm die technische Sicherheit und wirtschaftliche Rentabilität. Beide Begriffe sind mathematisch erfaßbar und zwingen den Ingenieur zu funktionalem Denken, das von der gewohnten Schulmathematik wesentlich abweicht. Dieses ingenieurmäßige Denken kann und soll schon am Rechenstab gepflegt werden.
Wenn ein Ingenieur z. B. im Rahmen seiner Festigkeitsuntersuchung findet, daß er eine Stahltrosse von 22,5 mm ⌀ braucht, dann ist es für ihn völlig belanglos, ob der Wert 22,3 mm oder 22,6 mm ⌀ genauer ist. Er erhält das eine Maß im Handel so wenig wie das andere. Er geht aus Gründen der Sicherheit nicht auf 20 mm ⌀, sondern auf 30 mm ⌀ über. Diese nachträglich getroffene Wahl wirkt sich selbstverständlich auf die elastische Formänderung, das Eigengewicht der Stahltrosse und ihren Preis aus, sie muß also schon im weiteren Verlauf der Untersuchung berücksichtigt werden.

Mathematiker: Wenn man den Begriff „Ingenieurmathematik" in dieser Weise versteht, dann hat er nicht bloß eine Berechtigung, sondern sogar seine eigenen Reize.

Ingenieur: Üben Sie dieses ingenieurmäßige Denken und Rechnen schon von Anfang an am Rechenstab an Hand von Aufgaben aus dem Bereich des Bauingenieurs, des Maschinenbauers oder Elektroingenieurs, je nach der Hörergruppe, die Sie vor sich haben und Sie werden sehen, daß der Rechenstab den Mathematiker nicht trennt vom Ingenieur, sondern beide miteinander verbindet im Interesse des Nachwuchses.

Die rechnerische Behandlung des pythagoräischen Lehrsatzes auf dem Rechenstab

von Ing. Rudolf Huber

Der Satz des Pythagoras (Pythagoras von Samos, 6. Jhd. v. Chr.) lautet:
In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat. Oder in algebraischer Schreibweise $a^2 + b^2 = c^2$. Daraus ist

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Den Stabrechner interessiert in erster Linie die rechnerische Behandlung dieses Lehrsatzes auf dem Stab; daher konzentriert sich sein Interesse lediglich auf den Ausdruck

$$\sqrt{N^2 \pm n^2},$$

wobei $N > n$ ist. In dieser Form kann der Ausdruck aber nur so auf dem Stab berechnet werden, daß aus der Summe der getrennt ermittelten Quadrate die Wurzel gezogen wird, eine Rechendurchführung, wie sie allgemein benutzt wird. Jedoch ihre Zerrissenheit durch eine zweimalige Stabbenützung und die dazwischen durchgeführte Addition auf dem Papier, läßt diese Berechnungsweise sehr ungünstig erscheinen. Erst dann, wenn man den Ausdruck wie folgt umformt:

$$\sqrt{N^2 \pm n^2} = n. \sqrt{\left(\frac{N}{n}\right)^2 \pm 1},$$

gelangt man zu einer zufriedenstellenden optimalen Berechnungsweise; wenn man die Berechnung auf die folgende Art durchführt:

Dn/C1	1. Koinzidenz
DN/C $\frac{N}{n}$ /Bs $= \left(\frac{N}{n}\right)^2$	2. Koinzidenz
B(s±1)/$\underline{D}$	3. Koinzidenz

D. h. man beginnt die erste Koinzidenz mit n, wodurch sich bei der dritten Koinzidenz die Multiplikation des Wurzelausdruckes $\sqrt{\left(\frac{N}{n}\right)^2 \pm 1}$ mit n von selbst ergibt. Auf diese Weise hat die Rechendurchführung von $\sqrt{N^2 \pm n^2}$ eine Einfachheit und Schnelligkeit erreicht, die es erlaubt und vom Wirtschaftlichkeitsstandpunkt auch verlangt, daß man daraus den entsprechenden Vorteil zieht.

In manchen Fällen ist es ratsam, für die Lösung das nachfolgende Schema zu benutzen, da hierbei durch die Mittelstellung der einen Kathete N ein größerer Skalenbereich zur Verfügung steht. Es gilt in dieser Form jedoch nur für $\sqrt{N^2 + n^2}$.

DN / B 10		A 10 / CN
Dn / Bs	oder	Cn / As
B (s+1) / $\underline{D}$		A (s+1) / $\underline{C}$

Siehe hierzu die praktische Anwendung in den Beispielen:
Rechenstabbrief Nr. 4, Seite 7 und 8 und Nr. 5, Seite 11, 13, 15 und 16.

Tafel 1 Rechenübersicht für $\sqrt{N^2 \pm n^2}$

	$\sqrt{N^2 + n^2}$	$\sqrt{N^2 - n^2}$	
$\frac{N}{n} < 1{,}1$	$\approx \sqrt{2N.n}$	$\sqrt{(N + n)\,(N - n)}$	
$\frac{N}{n} =$	Rechendurchführung am Stab: Dn/C1 $DN/Bs = (\frac{N}{n})^2$ $Bs+1/\underline{D}$	Dn/1 $DN/Bs = (\frac{N}{n})^2$ $Bs-1/\underline{D}$	
$= 1{,}1 \ldots 20$	Stellenwert: $\approx N$	$\frac{N}{n} > 2$: $\approx N$	$\frac{N}{n} < 2$: Die Strecke von n^2 bis N^2 auf der A-Skala läßt die Differenz N^2-n^2 gut erkennen. Die Wurzel daraus ergibt das Resultat.
$\frac{N}{n} > 20$	$\approx N$ oder $N + \frac{n^2}{2N}$	$N - \frac{n^2}{2N}$ oder $\sqrt{(N + n)\,(N - n)}$	

Die Tafel 1 enthält drei Rechenabschnitte: $\frac{N}{n} < 1{,}1$, $\frac{N}{n} = 1{,}1 \ldots 20$ und $\frac{N}{n} > 20$.

Der am häufigsten vorkommende Rechenabschnitt ist $\frac{N}{n} = 1{,}1 \ldots 20$. Seine Rechendurchführung und Stellenwertbestimmung muß ein Rechner, der seinen Rechenschieber für mehr als nur einen Multiplizier- und Quadrierstab ansieht, beherrschen. Da das Resultat auf der D-Skala aufscheint, kann $\sqrt{N^2 \pm n^2}$ mit beliebigen Zahlen multipliziert und dividiert werden. Man beachte den Stellenwert von $\frac{N}{n}$ bzw. $s = (\frac{N}{n})^2$, damit richtige $(s \pm 1)$-Werte eingestellt werden. $\frac{N}{n}$ liest man bei der zweiten Koinzidenz auf der C-Skala ab. Bei der Einstellung von $s-1$ auf B, wenn $s < 2$, ist wie beim Wurzelziehen auf die Verwendung der richtigen Dekade zu achten.

Die Ausdrücke des ersten und dritten Rechenabschnittes in Tafel 1 sind angenäherte oder gleichwertige Ausdrücke für $\sqrt{N^2 \pm n^2}$, die aber zum Teil sehr genaue Resultate ergeben.

Der leicht zu merkende Stellenwert für $\sqrt{N^2 + n^2}$ ist $1 \ldots 1{,}4N$. Für $\sqrt{N^2 - n^2}$ ist die Stellenwertbestimmung nicht mehr so einfach; man beachte die Hinweise in Tafel 1. Um eventuelle Schwierigkeiten bei der Stellenwertbestimmung zu vermeiden, benutze man statt $\sqrt{N^2 - n^2}$ den Ausdruck $\sqrt{(N+n)\,(N-n)}$.

Hinweis:

Die vom Verfasser entwickelte Symbolik für eine kurze und übersichtliche Aufschreibung von Stabrechnungen erfaßt in jeder Zeile ein Koinzidenz, das ist das Zusammenfallen

zweier Zahlen auf je einer Skala; Dn/C1 bedeutet, daß n auf D mit 1 auf C zusammenfällt. Zuerst kommen die Skalenbenennungen, dann die Zahlenzeichen. Auf der unterstrichenen Skala steht das Resultat, z. B. $B(s-1)/\underline{D}$ · s entspricht Rechenzwischenwerten. L ist der Läuferstrich.

Beispiele für die Erlernung der Rechendurchführung von $\sqrt{N^2 \pm n^2}$.

$\sqrt{46^2 - 31^2}$	$\sqrt{1{,}1^2 + 0{,}55^2}$	$\sqrt{116^2 - 100^2}$	$14 \cdot \sqrt{36^2 + 20^2}$
D31/C1	D55/C1	D1/C1	D2/C1
D46/Bs=2,2	D11/B4	D116/B1,346	D36/B3,24
B1,2/$\underline{D}$33,94	B5/$\underline{D}$1,232	B0,346/$\underline{D}$58,8	B4,24/C1
			C14/$\underline{D}$577

$\sqrt{37^2 + 1{,}3^2} \approx 37$; ein genaueres Resultat erhält man mit $N + \frac{n^2}{2N}$

$$= 37 + \frac{1{,}3^2}{74} = 37{,}0228$$

$\sqrt{6^2 + 5{,}8^2} = \sqrt{12 \cdot 5{,}8} = 8{,}34$; $\sqrt{18^2 - 17^2} = \sqrt{35 \cdot 1} = 5{,}92$

Übungsbeispiele:

Ermittle die Diagonalen der Rechtecke mit den Seiten

22	44	65	100
17	28	12	120

$a = 27$, $c = 48$; berechne die Fläche des rechtw. Dreiecks $A = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = 60$, $c = 65$; berechne die Fläche des rechtw. Dreiecks $A = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{c^2 - b^2}$

Berechne $c = \sqrt{2^2 + 3^2}$ und alle weiteren c-Werte, indem man jeden ermittelten c-Wert als die große Kathete unter der Wurzel einsetzt.

D2/C1
D3/B2,25
B3,25/D
B4,25/$\underline{D}$
usw.

Ermittle $\frac{1}{\sqrt{1{,}7^2 + 0{,}84^2}}$ und $\sqrt{47^2 + 18^2} \cdot \sqrt{18^2 - 12^2}$

Ermittle $\sqrt{N^2 + 3n^2}$, wenn $N = 150 \quad 210 \quad 79$; $n = 24 \quad 88 \quad 45$

A3/C1
Cn/L
L/C1
DN/Bs
$B(s+1)/\underline{D}$

Zusammenfassung

Das häufige Vorkommen des pythagoräischen Lehrsatzes läßt es für den Techniker, Lehrer und Schüler selbstverständlich erscheinen, daß man die Rechendurchführung von $\sqrt{N^2 \pm n^2}$ ebenso beherrscht, wie z. B. die Wurzelziehung. Der fortgeschrittene Rechner kann es sich nicht mehr leisten, an der Möglichkeit so rationeller Rechendurchführungen, wie sie der Stab in der Behandlung des pythagoräischen Lehrsatzes bietet, achtlos vorüber zu gehen.

Das Rechenproblem schwierigerer Ausdrücke, dazu auch $\sqrt{N^2 \pm n^2}$ gehört, ist meist das Problem der Niederschrift ihrer Rechendurchführungen und ein Stellenwertproblem. Das erste Problem kann nur dann als gelöst betrachtet werden, wenn der Rechner die Niederschrift ebenso zur Hand hat wie den Stab, weil es unmöglich ist, daß man sich schwierigere Rechendurchführungen in der gleichen Weise merken soll, wie die einfacher Grundrechnungsarten. Das Stellenwertproblem kann man nur dann meistern, wenn man durch ausgiebiges Üben im Zahlenrechnen die Fähigkeit erlangt hat, den Stellenwert möglichst sicher zu erkennen.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen am Rechenstab

(Fortsetzung der Abhandlung aus den Rechenstabbriefen Nr. 3 und 4)
von Ing. H. Bachmann

Die Kreis- und Hyperbelfunktionen

In der Wechselstromtechnik werden insbesondere für die Behandlung von T- und π-Schaltungen die komplexen Hyperbelfunktionen gebraucht. Da es sich bei diesen komplexen Hyperbelfunktionen jedoch ebenfalls um komplexe Zahlen handelt, können diese komplizierten Ausdrücke doch wieder auf die einfachen, für das Stabrechnen günstigen Formen $A + j\,B$ gebracht werden. Aus Vollständigkeitsgründen sollen hier aber auch die weniger oft vorkommenden Kreisfunktionen komplexer Argumente behandelt werden.

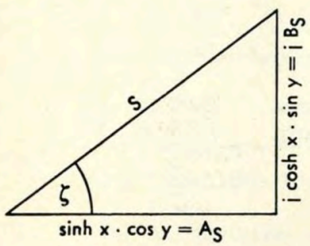
Der Hyperbelsinus einer komplexen Zahl

$$\sinh(x + j\,y) = \frac{e^{(x+jy)} - e^{-(x+jy)}}{2}\text{ wobei:}$$

$$e^{(x+jy)} = e^x \cdot \cos y + j\,e^x \cdot \sin y \text{ und}$$

$$e^{-(x+jy)} = e^{-x} \cdot \cos y - j\,e^{-x} \cdot \sin y \text{ ist. Somit wird:}$$

$$\sinh(x + j\,y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \cos y + j\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \sin y$$



$$= \underline{\sinh x \cdot \cos y + j \cosh x \cdot \sin y = A_S + j\,B_S} = S\underline{/\zeta}$$

$$S = \sqrt{A_S^{\,2} + B_S^{\,2}} = \sqrt{\frac{\cosh 2x - \cos 2y}{2}}$$

$$\tan\zeta = \frac{B_S}{A_S} = \frac{\tan y}{\tanh x}$$

Bei Verwendung des Duplex-Rechenstabes 2/82 muß hierbei die Hyperbelfunktion unter Benutzung der Exponentialskalen e^x und e^{-x} gebildet werden.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Rechnung bei Verwendung des Mathema-Rechenstabes 2/84, der auf der Schieberrückseite die Skalen sinh, cosh und tanh in besonders günstiger Anordnung aufweist.

B e i s p i e l e :

$\underline{\sinh(0{,}8 + j\,0{,}22)} = \sinh(50{,}8^g + j\,14^g) = A_S + j\,B_S$

y 200 / Y π // Y 0,22 / y 14^g und Y 0,8/y $50{,}8^g$

$\sinh(50{,}8^g + j\,14^g) = \sinh 50{,}8^g \cdot \cos 14^g + j \cosh 50{,}8^g \cdot \sin 14^g$

sinh $50{,}8^g$ / Y 1 // cos 14^g bzw. sin $(100^g - 14^g)$ / y $0{,}863 = A_S$

cosh $50{,}8^g$ / Y 0,1 // sin 14^g / y $= 0{,}291 = B_S$

$\sinh(0{,}8 + j\,0{,}22) = 0{,}863 + j\,0{,}291$

$\underline{\sinh(0{,}8 - j\,0{,}22)} = \sinh(50{,}8^g - j\,14^g)$

$= \sinh 50{,}8^g \cdot \cos 14^g - j \cosh 50{,}8^g \cdot \sin 14^g$

$= 0{,}863 - j\,0{,}291$

Hierbei ist zu beachten, daß

$\sinh(-x) = -\sinh x$ und $\cosh(-x) = \cosh x$ bzw.

$\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ ist.

Das Argument des komplexen Hyperbelsinus

$\operatorname{ar\,sinh}(S\underline{/\zeta}) = x + j\,y$

Mit $\sinh(x + j\,y) = A_S + j\,B_S = \sinh x \cdot \cos y + j \cosh x \cdot \sin y$

erhält man unter Berücksichtigung von $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ und $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ für:

$A_S^{\,2} + B_S^{\,2} = \sinh^2 x + \sin^2 y$

und aus $A_S = \sinh x \cdot \cos y$ ergibt sich: $\sinh^2 x = \dfrac{A_S^{\,2}}{\cos^2 y}$.

Es wird also: $A_S^{\,2} + B_S^{\,2} = \dfrac{A_S^{\,2}}{(1 - \sin^2 y)} + \sin^2 y$ und daraus:

$\sin^4 y - \sin^2 y\,(A_S^{\,2} + B_S^{\,2} + 1) + B_S^{\,2} = 0.$

Setzt man für $\dfrac{A_S^{\,2} + B_S^{\,2} + 1}{2} = M_S$ so erhält man

$\sin^2 y = M_S \pm \sqrt{M_S^{\,2} - B_S^{\,2}}.$

Da $M_S + \sqrt{M_S^{\,2} - B_S^{\,2}} > 1$ ist, hat nur die Wurzel $M_S - \sqrt{M_S^{\,2} - B_S^{\,2}}$ Bedeutung; es wird also:

$$\underline{\sin y = \sqrt{M_S - \sqrt{M_S^{\,2} - B_S^{\,2}}}} \text{ und } \sinh x = \frac{A_S}{\cos y}$$

$$\text{bzw. } \cosh x = \frac{B_S}{\sin y}$$

B e i s p i e l e :

$\underline{\operatorname{ar\,sinh}(0{,}912\underline{/20{,}7^g})}$; $0{,}912\underline{/20{,}7^g} = A_S + j\,B_S = 0{,}863 + j\,0{,}291$

$2\,M_S = A_S^{\,2} + B_S^{\,2} + 1 = 1{,}83$; $M_S = 0{,}915$

y 0,863 / Y^2 0,1 // y 0,291 / Y^2 0,0114; 0,0114 + 0,1 = 0,1114

Y^2 0,1114 / y^2 0,83; 0,83 + 1 = $\underline{1{,}83}$ = 2 M

$\sin y = \sqrt{0{,}915 - \sqrt{0{,}915^2 - 0{,}291^2}} = \sqrt{0{,}915 - 0{,}867} = \sqrt{0{,}048} = 0{,}218$; $y = 14^g$

y 0,291 / Y^2 0,1 // y 0,915 / Y^2 0,985; 0,985 — 0,1 = 0,885

Y^2 0,885 / y 0,867

$\sinh x = A_S : \cos y = 0{,}863 : \cos 14^g = 0{,}887$; $x = 50{,}8^g$

y 0,863 / sin $(100^g - 14^g)$ // Y 1 / sinh $50{,}8^g$

$\operatorname{ar\,sinh}(0{,}912\underline{/20{,}7^g}) = 50{,}8^g + j\,14^g = 0{,}8 + j\,0{,}22$

$\underline{\operatorname{ar\,sinh}(0{,}3495 + j\,0{,}222)}$

$2\,M_S = A_S^{\,2} + B_S^{\,2} + 1 = 1{,}171$

y 0,3495 / Y^2 0,1 // y 0,222 / Y^2 0,0404; 0,0404 + 0,1 = 0,1404

Y^2 0,1404 / y^2 0,171; 0,171 + 1 = 1,171

$\sin y = \sqrt{0{,}586 - \sqrt{0{,}586^2 - 0{,}222^2}} = \sqrt{0{,}586 - 0{,}542} = \sqrt{0{,}044} = 0{,}21$; $y = 13{,}5^g$

y 0,222 / Y^2 0,1 // y 0,586 / Y^2 0,696; 0,696 — 0,1 = 0,596

Y^2 0,596 / y 0,542

$\sinh x = A_S : \cos y = 0{,}3495 : \cos 13{,}5^g = 0{,}357$; $x = 22{,}3^g$

y 0,3495 / sin $(100^g - 13{,}5^g)$ // Y 1 / sinh $22{,}3^g$ ·

$\operatorname{ar\,sinh}(0{,}3495 + j\,0{,}222) = 22{,}3^g + j\,13{,}5^g = 0{,}35 + j\,0{,}212$

Der Sinus einer komplexen Zahl

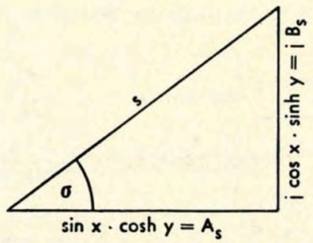
Auch der Sinus einer komplexen Zahl läßt sich über die Exponentialfunktionen ableiten; man braucht hierbei nur die Beziehung $\sin \mathfrak{z} = \frac{\sinh j\mathfrak{z}}{j}$ anwenden.

$$\sin (x + j y) = \frac{e^{j(x+jy)} - e^{-j(x+jy)}}{2j} = \frac{e^{(-y+jx)} - e^{(y-jx)}}{2j}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + j \sin x) - e^{y}(\cos x - j \sin x)}{2j}$$

$$= \frac{(e^{y} + e^{-y}) \sin x}{2} + \frac{(e^{-y} - e^{y}) \cos x}{2j}$$

Das zweite Glied im Zähler und Nenner mit $j^2 = -1$ multipliziert ergibt:



$$\sin (x + j y) = \frac{(e^{y} + e^{-y}) \cdot \sin x}{2} + j\, \frac{(e^{y} - e^{-y}) \cos x}{2}$$

$$= \sin x \cdot \cosh y + j \cos x \cdot \sinh y = A_s + j B_s = s \underline{/\sigma}$$

$$s = \sqrt{A_s^{\,2} + B_s^{\,2}} = \sqrt{\frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2}}; \quad \tan \sigma = \frac{B_s}{A_s} = \frac{\tanh y}{\tan x}$$

B e i s p i e l e :

$\underline{\sin (0{,}9 + j\, 0{,}46)} = \sin (57{,}3^g + j\, 29{,}3^g) = A_s + j B_s$

$= \sin 57{,}3^g \cdot \cosh 29{,}3^g + j \cos 57{,}3^g \cdot \sinh 29{,}3^g$

cosh $29{,}3^g$ / Y 0,1 // sin $57{,}3^g$ / y 0,867 = A_s

sinh $29{,}3^g$ / Y 1 // sin ($100^g - 57{,}3^g$) / y 0,296 = B_s

$\sin (0{,}9 + j\, 0{,}46) = 0{,}867 + j\, 0{,}296$

$\underline{\sin (-0{,}20 - j\, 0{,}90)} = \sin (-12{,}7^g - j\, 57{,}3^g)$

$= -\sin 12{,}7^g \cdot \cosh 57{,}3^g - j \cos 12{,}7^g \cdot \sinh 57{,}3^g$

cosh $57{,}3^g$ / Y 0,1 // sin $12{,}7^g$ / y 0,284 = A_s

sinh $57{,}3^g$ / Y 1 // sin ($100^g - 12{,}7^g$) / y 1,005 = B_s

$\sin (-0{,}20 - j\, 0{,}90) = -0{,}284 - j\, 1{,}005$

Das Argument des komplexen Sinus

$\text{arc} \sin (s \underline{/\sigma}) = x + j y$

Mit $\sin (x + j y) = A_s + j B_s = \sin x \cdot \cosh y + j \cos x \cdot \sinh y$ erhält man unter Berücksichtigung von $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ für:

$$A_s^{\,2} + B_s^{\,2} = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Berücksichtigt man nun noch $\sinh^2 y = \frac{B_s^{\,2}}{\cos^2 x}$ so erhält man ähnlich dem Vorgange beim Hyperbelsinus schließlich:

$$\underline{\sin x = \sqrt{M_s - \sqrt{M_s^{\,2} - A_s^{\,2}}}} \quad \text{wobei } M_s = \frac{A_s^{\,2} + B_s^{\,2} + 1}{2}$$

$$\underline{\sinh y = \frac{B_s}{\cos x}} \quad \text{bzw. } \cosh y = \frac{A_s}{\sin x}$$

B e i s p i e l e :

$\underline{\text{arc} \sin (0{,}867 + j\, 0{,}296)}$

$2 M_s = A_s^{\,2} + B_s^{\,2} + 1 = 1{,}84; \quad M_s = 0{,}92$

y 0,867 / Y^2 0,1 // y 0,296 / Y^2 0,0116; 0,0116 + 0,1 = 0,1116

Y^2 0,1116 / y^2 0,84; 0,84 + 1 = 1,84 = 2 M_s

$\sin x = \sqrt{0{,}92 - \sqrt{0{,}92^2 - 0{,}867^2}} = \sqrt{0{,}92 - 0{,}307} = \sqrt{0{,}613} = 0{,}781; \quad \mathbf{x = 57{,}3^g}$

y 0,867 / Y^2 0,1 // y 0,92 / Y^2 0,1125; 0,1125 − 0,1 = 0,0125

Y^2 0,0125 / y 0,307

$\sinh y = 0{,}296 : \cos 57{,}3^g = 0{,}477; \quad y = 29{,}3^g$

y 0,296 / sin ($100^g - 57{,}3^g$) // Y 1 / sinh $29{,}3^g$

$\text{arc} \sin (0{,}867 + j\, 0{,}296) = 57{,}3^g + j\, 29{,}3^g$

$\underline{\text{arc} \sin (-0{,}286 - j\, 1{,}005)}$

$2 M_s = A_s^{\,2} + B_s^{\,2} + 1 = 2{,}09; \quad M_s = 1{,}045$

y 1,005 / Y^2 0,1 // y 0,286 / Y^2 0,0081; 0,0081 + 0,1 = 0,1081

Y^2 0,1081 / y^2 1,09; 1,09 + 1 = 2,09

$\sin x = \sqrt{1{,}045 - \sqrt{1{,}045^2 - 0{,}286^2}} = \sqrt{1{,}045 - 1{,}006} = \sqrt{0{,}039} = 0{,}198; \quad x = 12{,}7^g$

y 0,286 / Y^2 0,1 // y 1,045 / Y^2 1,333; 1,333 − 0,1 = 1,233

Y^2 1,233 / y^2 1,006

$\sinh y = 1{,}005 : \cos 12{,}7^g = 57{,}3^g;$

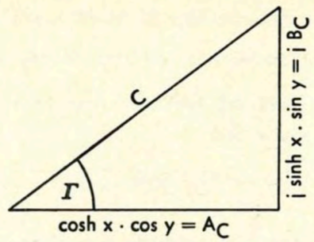
$\text{arc} \sin (-0{,}286 - j\, 1{,}005) = -12{,}7^g - j\, 57{,}3^g$

Der Hyperbelcosinus einer komplexen Zahl

$$\cosh (x + j y) = \frac{e^{(x+jy)} + e^{-(x+jy)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cos y + j\, \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \sin y$$

$$= \cosh x \cdot \cos y + j \sinh x \cdot \sin y$$

$$= A_C + j B_C = C \underline{/\Gamma}$$



$$C = \sqrt{A_C^2 + B_C^2} = \sqrt{\frac{\cosh 2x + \cos 2y}{2}}$$

$$\tan \Gamma = \frac{B_C}{A_C} = \tanh x \cdot \tan y$$

$\underline{\cosh(-0{,}42 + j\,0{,}45)} = \cosh(-26{,}8^g + j\,28{,}7^g)$

$= \cosh 26{,}8^g \cdot \cos 28{,}7^g + j\,(-\sinh 26{,}8^g \cdot \sin 28{,}7^g)$

$\cosh 26{,}8^g$ / Y 0,1 // $\cos 28{,}7^g$ bzw. $\sin(100^g - 28{,}7^g)$ / y 0,98 $= A_C$

$\sinh 26{,}8^g$ / Y 1 // $\sin 28{,}7^g$ / y 0,189 $= B_C$

$\cosh(-0{,}42 + j\,0{,}45) = 0{,}98 - j\,0{,}189$

$\underline{\cosh(-0{,}46 - j\,0{,}67)} = \cosh(-29{,}3^g - j\,42{,}7^g)$

$= \cosh 29{,}3^g \cdot \cos 42{,}7^g + j \sinh 29{,}3^g \cdot \sin 42{,}7^g$

$\cosh 29{,}3^g$ / Y 0,1 // $\cos 42{,}7^g$ bzw. $\sin(100 - 42{,}7^g)$ / y $= 0{,}867 = A_C$

$\sinh 29{,}3^g$ / Y 1 // $\sin 42{,}7^g$ / y $= 0{,}296 = B_C$

$\cosh(-0{,}46 - j\,0{,}67) = 0{,}867 + j\,0{,}296$

Das Argument des komplexen Hyperbelcosinus

$\text{arc}\cosh(C/\Gamma) = x + j\,y$

Mit $\cosh(x + j\,y) = A_C + j\,B_C = \cosh x \cdot \cos y + j \sinh x \cdot \sin y$
erhält man unter Berücksichtigung von $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ und $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ für

$$A_C^2 + B_C^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

und aus $B_C = \sinh x \cdot \sin y$ ergibt sich: $\sinh^2 x = \dfrac{B_C^2}{\sin^2 y}$

Es wird also: $A_C^2 + B_C^2 = \dfrac{B_C^2}{1 - \cos^2 y} + \cos^2 y$ und daraus:

$\cos^4 y - (A_C^2 + B_C^2 + 1)\cos^2 y + A_C^2 = 0.$

Setzt man für $\dfrac{A_C^2 + B_C^2 + 1}{2} = M_C$ so wird:

$\cos^2 y = + M_C \pm \sqrt{M_C^2 - A_C^2}$; da $M_C + \sqrt{M_C^2 - A_C^2} > 1$;

hat nur die Wurzel $M_C - \sqrt{M_C^2 - A_C^2}$ Bedeutung.

Es gilt somit:

$\cos y = \sqrt{M_C - \sqrt{M_C^2 - A_C^2}}$ und

$\sinh x = \dfrac{B_C}{\sin y}$ bzw. $\cosh x = \dfrac{A_C}{\cos y}$

Beispiele:

$\underline{\text{ar}\cosh(0{,}996\,\underline{/12{,}15^g})}$; $0{,}996\,\underline{/12{,}15^g} = A_C + j\,B_C = 0{,}98 - j\,0{,}189$

$2\,M_C = A_C^2 + B_C^2 + 1 = 1{,}996$; $M_C = 0{,}998$

y 0,98 / Y^2 1 // y 0,189 / Y^2 0,0372; $0{,}0372 + 1 = 1{,}037$;

Y^2 1,037 / y^2 0,996; $0{,}996 + 1 = 1{,}996$

$\cos y = \sqrt{+\,0{,}998 - \sqrt{0{,}995 - 0{,}960}} = 0{,}901$; $y = 28{,}7^g$

$\sinh x = 0{,}189 : \sin 28{,}7^g = 0{,}434$; $x = 26{,}8^g$

$\sin(28{,}7^g)$ / y 0,189 // Y 1 / $\sinh 26{,}8^g$

$\text{ar}\cosh(0{,}98 - j\,0{,}189) = -26{,}8^g + j\,28{,}7^g$ bzw. $26{,}8^g - j\,28^g$

$\underline{\text{ar}\cosh(0{,}867 + j\,0{,}296)}$

$2\,M_C = A_C^2 + B_C^2 + 1 = 1{,}84$; $M_C = 0{,}92$

y 0,867 / Y^2 0,1 // y 0,296 / Y^2 0,01165; $0{,}01165 + 0{,}1 = 0{,}11165$

Y^2 0,11165 / y^2 0,84; $0{,}84 + 1 = 1{,}84$

$\cos y = \sqrt{0{,}92 - \sqrt{0{,}846 - 0{,}751}} = 0{,}782$; $y = 42{,}7^g$

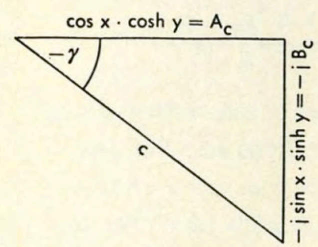
$\sinh x = 0{,}296 : \sin 42{,}7^g = 0{,}476$; $x = 29{,}3^g$

$\sin 42{,}7^g$ / y 0,296 // Y 1 / $\sinh 29{,}3^g$

$\text{ar}\cosh(0{,}867 + j\,0{,}296) = -29{,}3^g - j\,42{,}7^g$ bzw. $29{,}3^g + j\,42{,}7^g$

Der Cosinus einer komplexen Zahl

$$\cos(x + j\,y) = \cosh j\,(x + j\,y) = \frac{e^{(-y + j\,x)} + e^{(y - j\,x)}}{2}$$



$$= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \cos x + j\,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} \sin x$$

$$= \cos x \cdot \cosh y - j \sin x \cdot \sinh y$$

$$= A_c - j\,B_c = c\,\underline{/\gamma}$$

$$c = \sqrt{A_c^2 + B_c^2} = \sqrt{\frac{\cos 2x + \cosh 2y}{2}}$$

$$\tan \gamma = -\tan x \cdot \tanh y$$

B e i s p i e l e :

$\cos(0{,}67 + j\,0{,}46) = \cos(42{,}6^g + j\,29{,}3^g)$

$= \cosh 29{,}3^g \cdot \cos 42{,}6^g - j \sinh 29{,}3^g \cdot \sin 42{,}6^g$

$\cosh 29{,}3^g$ / Y 0,1 // $\sin(100^g - 42{,}6^g)$ / y 0,868 = A_c

$\sinh 29{,}3^g$ / Y 1 // $\sin 42{,}6^g$ / y 0,295 = B_c

$\cos(0{,}67 + j\,0{,}46) = A_c - j\,B_c = 0{,}868 - j\,0{,}295$

$\cos(0{,}26 - j\,0{,}3) = \cos(16{,}6^g - j\,19{,}1^g)$

$= \cosh 19{,}1^g \cdot \cos 16{,}6^g - j \sinh 19{,}1^g \cdot \sin 16{,}6^g$

$\cosh 19{,}1^g$ / Y 0,1 // $\sin(100^g - 16{,}6^g)$ / y 1,008 = A_c

$\sinh 19{,}1^g$ / Y 1 // $\sin 16{,}6^g$ / y 0,0784 = B_c

$\cos(0{,}26 - j\,0{,}3) = 1{,}008 + j\,0{,}0784.$

Das Argument des komplexen Cosinus

$\operatorname{arc}\cos(c/\gamma) = x + j\,y$

Mit $\cos(x + j\,y) = A_c - j\,B_c = \cos x \cdot \cosh y - j \sin x \cdot \sinh y$

erhält man unter Berücksichtigung von $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ und $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ für:

$$A^2 + B^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

Berücksichtigt man außerdem noch $\sinh^2 y = \dfrac{B_c{}^2}{\sin^2 x}$, so erhält man ähnlich des Vorganges beim komplexen Sinus:

$$\cos x = \sqrt{M_c - \sqrt{M_c{}^2 - A_c{}^2}} \quad \text{wobei } M_c = \frac{A_c{}^2 + B_c{}^2 + 1}{2}$$

$$\cosh y = \frac{A_c}{\cos x} \quad \text{bzw.} \quad \sinh y = \frac{B_c}{\sin x}$$

B e i s p i e l e :

$\operatorname{arc}\cos(0{,}92\,/\!-20{,}8^g) = \operatorname{arc}\cos(0{,}868 - j\,0{,}295)$

$2\,M_c = A_c{}^2 + B_c{}^2 + 1 = 1{,}84;\quad M_c = 0{,}92$

y 0,868 / Y² 0,1 // y 0,295 / Y² 0,0116; 0,0116 + 0,1 = 0,1116

Y² 0,1116 / y² 0,84; 0,84 + 1 = 1,84 = 2 M_c

$\cos x = \sqrt{0{,}92 - \sqrt{0{,}92^2 - 0{,}868^2}} = \sqrt{0{,}92 - 0{,}306} = \sqrt{0{,}614} = 0{,}784;\ x = 42{,}6^g$

y 0,868 / Y² 0,1 // y 0,92 / Y² 0,1124; 0,1124 − 0,1 = 0,0124

Y² 0,0124 / y 0,306

$\cosh y = 0{,}868 : \cos 42{,}6^g = 1{,}11;\quad y = 29{,}3^g$

$\operatorname{arc}\cos(0{,}92\,/\!-20{,}8^g) = 42{,}6^g + j\,29{,}3^g = 0{,}67 + j\,0{,}46$ bzw.

$= -42{,}6^g - j\,29{,}3^g = -0{,}67 - j\,0{,}46$

$\operatorname{arc}\cos(1{,}008 + j\,0{,}0784)$

$2\,M_c = A_c{}^2 + B_c{}^2 + 1 = 2{,}024;\quad M_c = 1{,}012$

y 1,008 / Y² 1 // y 0,0784 / Y² 0,00606; 0,00606 + 1 = 1,006

Y² 1,006 / y² 1,024

$\cos x = \sqrt{1{,}012 - \sqrt{1{,}012^2 - 1{,}008^2}} = \sqrt{1{,}012 - 0{,}078} = 0{,}965;\quad x = 16{,}6^g$

y 1,008 / Y² 1 // y 1,012 / Y² 1,006; 1,006 − 1 = 0,006

Y² 0,006 / y 0,078

$\cosh y = 1{,}008 : \cos 16{,}6^g = 1{,}045;\quad y = 19{,}1^g$

$\operatorname{arc}\cos(1{,}008 + j\,0{,}0784) = 16{,}6^g - j\,19{,}1^g = 0{,}26 - j\,0{,}3$ bzw.

$= -16{,}6^g + j\,19{,}1^g = -0{,}26 + j\,0{,}3$

Anwendung:

1.) Ermittle den komplexen Kurzschluß-Strom einer Leitung von 40 km Länge bei einem Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}_0 = 720/\!-12^g$ Vektorohm und einer Kreisfrequenz f = 800 unter Berücksichtigung einer kilometrischen Fortpflanzungskonstante
$\gamma = 0{,}022\,/78^g$ und einer Übertragerendspannung von
$\mathfrak{U}_x = 120$ Volt.

$$J = \frac{\mathfrak{U}_x}{\mathfrak{Z}_0 \cdot \sinh \gamma\,x} = \frac{120}{720/\!-12^g \cdot \sinh 0{,}88/78^g}$$

$\sinh 0{,}88/78^g = \sinh(0{,}298 + j\,0{,}827) = \sinh(19^g + j\,52{,}7^g)$

$= \sinh 19^g \cdot \cos 52{,}7^g + j \cosh 19^g \cdot \sin 52{,}7^g$

$\sinh 19^g$ / Y 1 // $\sin(100^g - 52{,}7^g)$ / y 0,206 = A_s

$\cosh 19^g$ / Y 0,1 // $\sin 52{,}7^g$ / y 0,768 = B_s

$\sinh 0{,}88/78^g = 0{,}206 + j\,0{,}768 = 0{,}8/83{,}3^g$

$$J = \frac{120/0^g}{720/\!-12^g \cdot 0{,}8/83{,}3^g} = \frac{120/0^g}{576/71{,}3^g}$$

$J = 0{,}208\,/\!-71{,}3^g$

2.) Der Längswiderstand eines symmetrischen T-Gliedes beträgt bei 1000 Hz Frequenz $R_1 = 290 + j\,340$, der Querwiderstand $R_2 = -\,j\,530$ Vektorohm.

Berechne die Fortpflanzungskonstante γ des Vierpols.

$$\cosh\gamma = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 1 + \frac{290 + j\,340}{-\,j\,530} = 1 + \frac{\underline{447/55^g}}{\underline{530/-100^g}}$$

$$= 1 + (\underline{0{,}843/155^g}) = 1 - 0{,}642 + j\,0{,}548$$

$\cosh\gamma = 0{,}358 + j\,0{,}548$; ar cosh $(0{,}358 + j\,0{,}548)$

$2\,M_C = A_C{}^2 + B_C{}^2 + 1 = 1{,}428$; $M_C = 0{,}714$

y 0,548 / Y^2 0,1 // y 0,358 / Y^2 0,0427; 0,0427 + 0,1 = 0,1427

Y^2 0,1427 / y^2 0,428; 0,428 + 1 = 1,428

$$\cos y = \sqrt{0{,}714 - \sqrt{0{,}714^2 - 0{,}358^2}} = 0{,}309;\quad y = 80^g$$

y 0,358 / Y^2 0,1 // y 0,714 / Y^2 0,397; 0,397 — 0,1 = 0,297

Y^2 0,297 / y 0,618; 0,714 — 0,618 = 0,096

Y^2 0,096 / cos 80^g ; y = 80^g

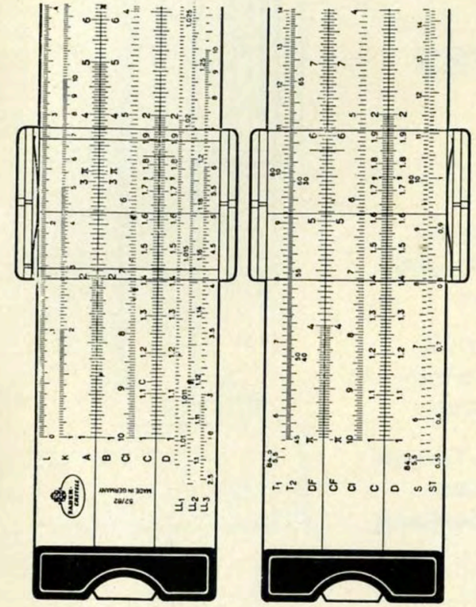
$\cosh x = 0{,}358 : \cos 80^g = 1{,}158;\ x = 35{,}6^g$

$\gamma = 35{,}6^g + j\,80^g = 0{,}56 + j\,1{,}26 = \underline{1{,}38/73{,}5^g}$

Die Fortpflanzungskonstante $\gamma = \beta + j\,\alpha$ beträgt 0,56 + j 1,26.

Bemerkung:

Die Vorzeichen der mehrdeutigen Lösungen bei den Cofunktionen (z. B.: Seite 15 und 17) können einer am Schluß der Abhandlung angeführten Formelzusammenstellung (Brief Nr. 6) entnommen werden.



CASTELL SCHUL-D-STAB 52/82

jetzt mit d r e i Exponentialskalen

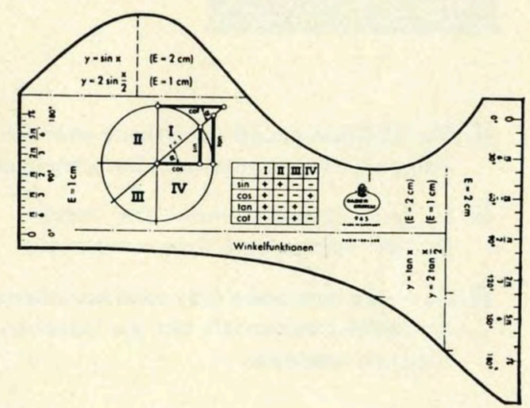
Zu den bisherigen Exponentialskalen LL_2 und LL_3 des bewährten CASTELL Schul-D-Stabes 52/82 hat sich nun die LL_1-Skala ($e^{0,01x}$) gesellt. Die Aufnahme dieser d r i t t e n Exponentialskala stellt eine bedeutsame Verbesserung des Rechenstabes 52/82 dar, da sich sein Gebrauchsumfang hierdurch erheblich erweitert, namentlich für Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Der CASTELL Schul-D-Stab wird somit umfassenden Ansprüchen gerecht, wie sie im Unterricht an Höheren Lehranstalten und Fachschulen an einen modernen Rechenstab gestellt werden.

Er vereint die Exponentialskalen LL_1, LL_2, LL_3, die π-versetzten Skalen CF, DF, die Skalen des Systems Rietz und die 2. Tangensskala T_2 über 45°. Die Hauptskalen auf Vorder- und Rückseite sind mit einem augenschonenden hellgrünen Farbstreifen unterlegt und treten dadurch stärker hervor. Läufer und Zunge können ungehindert bewegt werden, wenn der Stab auf der Tischplatte liegt. Jeder Stab wird in einem stabilen, durchsichtigen Plastiketui geliefert und ist mit einer ausführlichen Anleitung versehen.

Sinus-Tangens-Schablone 945

Diese Zeichenschablone aus grünem, durchsichtigem Celluloid dient dem mathematischen Zeichnen an Höheren Schulen und Fachschulen. Sie ist ein Spezialgerät zum Zeichnen von Kurven der Kreisfunktionen und enthält neben den Maßstäben für die Abszissenteilung in Grad und Bogenmaß auch ein Schema über den Funktionsverlauf.



Sinus-Tangens-Schablone 945 D: Unter dieser Nummer ist die Sinus-Tangens-Schablone als **Wandtafelgerät** lieferbar.